GIẢI BẰNG NHIỀU CÁCH ĐỀ THI ĐẠI HỌC MÔN TOÁN NĂM 2014

Câu 9. Cho x, y, z là các số thực không âm và thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{x^2}{x^2+yz+x+1}+\frac{y+z}{x+y+z+1}-\frac{1+yz}{9}$$

Cách 1:

Ta có $2(yz+1)=x^2+(y+z)^2\ge 2x(y+z)\Rightarrow yz+1\ge x(y+z)$ và $yz+1=\dfrac{x^2+(y+z)^2}{2}$.

Suy ra: $P\le\dfrac{x^2}{x^2+x+x(y+z)}+\dfrac{y+z}{x+y+z+1}-\dfrac{\frac{x^2+(y+z)^2}{2}}{9}$, $(x\ne 0)$

$$\Leftrightarrow P\le\frac{x}{x+y+z+1}+\frac{y+z}{x+y+z+1}-\frac{x^2+(y+z)^2}{18}$$

$$\Leftrightarrow P\le\frac{x+y+z}{x+y+z+1}-\frac{x^2+(y+z)^2}{18}\Leftrightarrow P\le 1-\frac{1}{x+y+z+1}-\frac{x^2+(y+z)^2}{18}\qquad (*)$$

Mà ta lại có $x+(y+z)\le\sqrt{(1^2+1^2)\left[x^2+(y+z)^2\right]}=\sqrt{2\left[x^2+(y+z)^2\right]}$,

suy ra : **(*)** $\Leftrightarrow P\le 1-\dfrac{1}{\sqrt{2\left[x^2+(y+z)^2\right]}+1}-\dfrac{x^2+(y+z)^2}{18}$.

Đặt $t=\sqrt{x^2+(y+z)^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2+2yz}=\sqrt{2+2yz}\ge\sqrt{2}$.

Lại do $2yz\le y^2+z^2=2-x^2\Leftrightarrow yz\le 1$, suy ra $t\in\left[\sqrt{2};2\right]$.

Xét hàm số $f(t)=1-\dfrac{1}{t\sqrt{2}+1}-\dfrac{t^2}{18}, t\in\left[\sqrt{2};2\right]; f'(t)=\dfrac{\sqrt{2}}{\left(t\sqrt{2}+1\right)^2}-\dfrac{t}{9}, t\in\left[\sqrt{2};2\right]$.

Do các hàm số $\dfrac{\sqrt{2}}{\left(t\sqrt{2}+1\right)^2}$ và $-\dfrac{t}{9}$ đều nghịch biến trên $\left[\sqrt{2};2\right]$ nên

$f'(t)$ là hàm số nghịch biến trên $\left[\sqrt{2};2\right]$. $\Rightarrow f'(t)\le f'\left(\sqrt{2}\right)=0$

$\Rightarrow f(t)$ là hàm số nghịch biến trên $\left[\sqrt{2};2\right]$ $\Rightarrow f(t)\le f\left(\sqrt{2}\right)=\dfrac{5}{9}$.

GTLN của P là $\dfrac{5}{9}$ khi $t=\sqrt{2}\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2\\ yz=0\\ x\ne 0\end{cases}$,

chẳng hạn khi $x=y=1; z=0$.

Cách 2:

Ta có: $x(y+z)\le\dfrac{x^2+(y+z)^2}{2}=\dfrac{x^2+y^2+z^2+2yz}{2}=\dfrac{2+2yz}{2}=1+yz$.

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2yz+2x(y+z)=2(1+yz)+2x(y+z)$$

$$\Rightarrow (x+y+z)^2\le 2(1+yz)+2(1+yz)\Leftrightarrow 1+yz\ge\frac{(x+y+z)^2}{4}.$$

Vậy $x(y+z)\le 1+yz$ và $1+yz\ge\dfrac{(x+y+z)^2}{4}$.

Suy ra: $P\le\dfrac{x^2}{x^2+x+x(y+z)}+\dfrac{y+z}{x+y+z+1}-\dfrac{\frac{(x+y+z)^2}{4}}{9}$, **(**)** $(x\ne 0)$

$$\Leftrightarrow P \le \frac{x^2}{x\left(x+y+z+1\right)} + \frac{y+z}{x+y+z+1} - \frac{\left(x+y+z\right)^2}{36} \Leftrightarrow P \le \frac{x+y+z}{x+y+z+1} - \frac{\left(x+y+z\right)^2}{36}.$$

Đặt $0 \le t = x+y+z \le \sqrt{\left(1+1+1\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)} = \sqrt{6}$.

Xét hàm số $f\left(t\right) = \frac{t}{t+1} - \frac{t^2}{36}, t \in \left[0;\sqrt{6}\right]$;

$$f'\left(t\right) = \frac{1}{\left(t+1\right)^2} - \frac{t}{18}, t \in \left[0;\sqrt{6}\right];\ f''\left(t\right) = \frac{-2}{\left(t+1\right)^3} - \frac{1}{18} < 0, \forall t \in \left[0;\sqrt{6}\right].$$

$\Rightarrow f'\left(t\right)$ là hàm số nghịch biến trên $\left[0;\sqrt{6}\right]$, mà $f'\left(2\right) = 0$

nên $t = 2$ là nghiệm duy nhất của $f'\left(t\right)$.

Bảng biến thiên của hàm $f\left(t\right)$

t	0		2		$\sqrt{6}$
$f'\left(t\right)$		$+$	0	$-$	
$f\left(t\right)$	0	$\nearrow$	$\frac{5}{9}$	$\searrow$	$f\left(\sqrt{6}\right)$

GTLN của P là $\frac{5}{9}$ khi $t = 2 \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 2 \\ x+y+z = 2 \\ x \ne 0 \end{cases}$, chẳng hạn khi $x = y = 1; z = 0$

Cách 3: Ta có $2(yz+1)=x^2+(y+z)^2\geq 2x(y+z)$.

$\Rightarrow yz+1\geq x(y+z)$ và $yz+1=\dfrac{x^2+(y+z)^2}{2}$. Suy ra:

$$P\leq \frac{x^2}{x^2+x+x(y+z)}+\frac{y+z}{x+y+z+1}-\frac{\frac{x^2+(y+z)^2}{2}}{9},\quad (x\neq 0)$$

$$\Leftrightarrow P\leq \frac{x}{x+y+z+1}+\frac{y+z}{x+y+z+1}-\frac{x^2+(y+z)^2}{18}$$

$$\Leftrightarrow P\leq \frac{x+y+z}{x+y+z+1}-\frac{x^2+(y+z)^2}{18}\Leftrightarrow P\leq 1-\frac{1}{x+y+z+1}-\frac{x^2+(y+z)^2}{18}$$

Mà ta lại có $x=x.1\leq \dfrac{x^2+1}{2}$ và $y+z=(y+z).1\leq \dfrac{(y+z)^2+1}{2}$, suy ra :

$x+(y+z)\leq \dfrac{x^2+1}{2}+\dfrac{(y+z)^2+1}{2}=\dfrac{x^2+(y+z)^2+2}{2}$. $\Longrightarrow$ Vậy ta có:

$$\Leftrightarrow P\leq 1-\frac{1}{\frac{x^2+(y+z)^2+2}{2}+1}-\frac{x^2+(y+z)^2}{18}\Leftrightarrow P\leq 1-\frac{2}{x^2+(y+z)^2+4}-\frac{x^2+(y+z)^2}{18}$$

$$\Leftrightarrow P\leq 1+\frac{4}{18}-\left[\frac{2}{x^2+(y+z)^2+4}+\frac{x^2+(y+z)^2+4}{18}\right].$$

Mà ta có :

$$\frac{2}{x^2+(y+z)^2+4}+\frac{x^2+(y+z)^2+4}{18}\geq 2\sqrt{\frac{2}{x^2+(y+z)^2+4}.\frac{x^2+(y+z)^2+4}{18}}=\frac{2}{3}$$

suy ra $P\leq 1+\dfrac{4}{18}-\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow P\leq \dfrac{5}{9}$. GTLN của P là $\dfrac{5}{9}$, (chẳng hạn khi $x=y=1; z=0$)

Cách 4:

Ta có: $x(y+z) \le \dfrac{x^2+(y+z)^2}{2} = \dfrac{x^2+y^2+z^2+2yz}{2} = \dfrac{2+2yz}{2} = 1+yz$.

Suy ra: $P \le \dfrac{x^2}{x^2+x+x(y+z)} + \dfrac{y+z}{x+y+z+1} - \dfrac{1+yz}{9}$, $(x \ne 0)$

$\Leftrightarrow P \le \dfrac{x^2}{x(x+y+z+1)} + \dfrac{y+z}{x+y+z+1} - \dfrac{1+yz}{9}$

$\Leftrightarrow P \le \dfrac{x+y+z}{x+y+z+1} - \dfrac{1+yz}{9} \Leftrightarrow P \le 1 - \dfrac{1}{x+y+z+1} - \dfrac{1+yz}{9}$.

Mà $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2yz+2x(y+z) = 2(1+yz)+2x(y+z)$

$\Rightarrow (x+y+z)^2 \le 2(1+yz)+2(1+yz) \Leftrightarrow 4(1+yz) \ge (x+y+z)^2 \Leftrightarrow x+y+z \le 2\sqrt{(1+yz)}$

Suy ra $P \le 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{(1+yz)}+1} - \dfrac{1+yz}{9}$. Đặt $t = \sqrt{(1+yz)} \ge 1$.

Lại do $2yz \le y^2+z^2 = 2-x^2 \Leftrightarrow yz \le 1$, suy ra $t \in \left[1;\sqrt{2}\right]$.

Xét hàm số $f(t) = 1 - \dfrac{1}{2t+1} - \dfrac{t^2}{9}, t \in \left[1;\sqrt{2}\right]$;

$$f'(t) = \frac{2}{(2t+1)^2} - \frac{2t}{9}, t \in \left[1;\sqrt{2}\right];\ f''(t) = \frac{-4}{(2t+1)^3} - \frac{2}{9} < 0, \forall t \in \left[1;\sqrt{2}\right].$$

$\Rightarrow f'(t)$ là hàm số nghịch biến trên $\left[1;\sqrt{2}\right]$. $\Rightarrow f'(t) \le f'(1) = 0$

$\Rightarrow f(t)$ là hàm số nghịch biến trên $\left[1;\sqrt{2}\right] \Rightarrow f(t) \le f(1) = \dfrac{5}{9}$.

GTLN của P là $\dfrac{5}{9}$ khi $t = 1 \Rightarrow \sqrt{(1+yz)} = 1 \Rightarrow x = y = 1; z = 0$.

Cách 5:

Dự đoán dấu bằng xảy ra tại $x = y = 1; z = 0$ nên ta xét bất dẳng thức hiển nhiên sau : $(x-1)^2 + \left[(y+z)-1\right]^2 \ge 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + (y+z)^2 - 2(y+z) + 1 \ge 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2yz - 2x - 2y - 2z + 2 \ge 0$$

$\Leftrightarrow 2 + 2yz - 2x - 2y - 2z + 2 \ge 0$ (do $x^2 + y^2 + z^2 = 2$) $\Leftrightarrow 2 + yz \ge x + y + z$.

Lại có: $1 + yz = \dfrac{x^2 + y^2 + z^2 + 2yz}{2} = \dfrac{x^2 + (y+z)^2}{2} \ge \dfrac{2\sqrt{x^2(y+z)^2}}{2} = x(y+z)$.

Vậy ta có $2 + yz \ge x + y + z$ và $1 + yz \ge x(y+z)$. Suy ra:

$$P \le \frac{x^2}{x^2 + x + x(y+z)} + \frac{y+z}{x+y+z+1} - \frac{x+y+z-1}{9}, \quad (x \ne 0)$$

$$\Leftrightarrow P \le \frac{x}{x+y+z+1} + \frac{y+z}{x+y+z+1} - \frac{x+y+z-1}{9}$$

$$\Leftrightarrow P \le \frac{x+y+z}{x+y+z+1} - \frac{x+y+z-1}{9} \Leftrightarrow P \le 1 - \frac{1}{x+y+z+1} - \frac{x+y+z-1}{9}$$

$$\Leftrightarrow P \le 1 + \frac{2}{9} - \left(\frac{1}{x+y+z+1} + \frac{x+y+z+1}{9}\right)$$

Mà ta lại có $\dfrac{1}{x+y+z+1} + \dfrac{x+y+z+1}{9} \ge 2\sqrt{\dfrac{1}{x+y+z+1} \cdot \dfrac{x+y+z+1}{9}} = \dfrac{2}{3}$, suy ra:

$\Leftrightarrow P \le 1 + \dfrac{2}{9} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{9}$. GTLN của P là $\dfrac{5}{9}$,chẳng hạn khi $x = y = 1; z = 0$.

Cách 6:

Ta có $x^2+1\ge 2x$ và $(y+z)^2+1\ge 2(y+z)\Rightarrow (y+z)^2+1+x^2+1\ge 2x+2(y+z)$

$\Leftrightarrow (y+z)^2+x^2\ge 2(x+y+z-1)\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2yz\ge 2(x+y+z-1)$

$\Leftrightarrow 2+2yz\ge 2(x+y+z-1)$ (do $x^2+y^2+z^2=2$) $\Leftrightarrow 2+yz\ge x+y+z$.

Lại có: $1+yz\ge x(y+z)$. Suy ra:

$$P\le \frac{x^2}{x^2+x+x(y+z)}+\frac{y+z}{x+y+z+1}-\frac{1+yz}{9}\ ,\ (x\ne 0)$$

$$\Leftrightarrow P\le \frac{x}{x+y+z+1}+\frac{y+z}{x+y+z+1}-\frac{1+yz}{9}\Leftrightarrow P\le \frac{x+y+z}{x+y+z+1}-\frac{1+yz}{9}$$

$$\Leftrightarrow P\le 1-\frac{1}{x+y+z+1}-\frac{1+yz}{9}\Leftrightarrow P\le 1-\frac{1}{3+yz}-\frac{1+yz}{9}$$

$$\Leftrightarrow P\le 1+\frac{2}{9}-\left(\frac{1}{3+yz}+\frac{3+yz}{9}\right)$$ Mà ta lại có

$\frac{1}{3+yz}+\frac{3+yz}{9}\ge 2\sqrt{\frac{1}{3+yz}.\frac{3+yz}{9}}=\frac{2}{3}$, suy ra : $P\le 1+\frac{2}{9}-\frac{2}{3}=\frac{5}{9}$.

GTLN của P là $\frac{5}{9}$,chẳng hạn khi $x=y=1;z=0$.