GIẢI BẰNG NHIỀU CÁCH ĐỀ THI ĐẠI HỌC MÔN TOÁN NĂM 2014

Trần Tuấn Anh – Mail: TranTuanAnh858@gmail.com

GIẢI ĐỀ THI TOÁN KHỐI A, A1 BẰNG CÁC CÁCH KHÁC NHAU

<u>Câu 8.</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x\sqrt{12-y}+\sqrt{y(12-x^2)}=12 \ (1) \\ x^3-8x-1=2\sqrt{y-2} \ (2) \end{cases}$.

Điều kiện: $\begin{cases} 12-y\ge 0 \\ 12-x^2\ge 0 \\ y-2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\in[2;12] \\ x\in\left[-2\sqrt{3};2\sqrt{3}\right] \end{cases}$.

<u>Cách 1:</u> Áp dụng BĐT bunhia ta có:

Do $y\ge 2$ và $y(12-x^2)\ge 0$ nên $12-x^2\ge 0$, từ đó ta có :

$$x\sqrt{12-y}+\sqrt{y(12-x^2)}=x\sqrt{12-y}+\sqrt{y}.\sqrt{12-x^2}\le\sqrt{\left(x^2+12-x^2\right)\left(12-y+y\right)}=12$$

Đẳng thức xảy ra khi ta có $\dfrac{x}{\sqrt{12-y}}=\dfrac{\sqrt{12-x^2}}{\sqrt{y}}\Leftrightarrow\dfrac{x}{\sqrt{12-x^2}}=\dfrac{\sqrt{12-y}}{\sqrt{y}}$

$$\Leftrightarrow\frac{x}{\sqrt{12-x^2}}=\frac{\sqrt{12-y}}{\sqrt{12-\left(\sqrt{12-y}\right)^2}}.\ (*)$$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t}{\sqrt{12-t^2}}, t\in\left(0;2\sqrt{3}\right)$; $f'(t)=\dfrac{12}{\left(12-t^2\right)\sqrt{12-t^2}}>0, \forall t\in\left(0;2\sqrt{3}\right)$

$f(t)$ là hàm số đồng biến trên $\left(0;2\sqrt{3}\right)$.

Mà (*) ta suy ra $f(x)=f\left(\sqrt{12-y}\right)\Leftrightarrow x=\sqrt{12-y}\Leftrightarrow x^2=12-y$.

Trần Tuấn Anh – Mail: TranTuanAnh858@gmail.com

Thế $y=12-x^2$ vào (2) ta có : $x^3-8x-1=2\sqrt{10-x^2}$

$$\Leftrightarrow x^3-8x-3=2\left(\sqrt{10-x^2}-1\right)\Leftrightarrow (x-3)\left(x^2+3x+1\right)=\frac{2\left(9-x^2\right)}{\sqrt{10-x^2}+1}$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(x^2+3x+1\right)+\frac{2(x-3)(x+3)}{\sqrt{10-x^2}+1}=0\Leftrightarrow (x-3)\left[\left(x^2+3x+1\right)+\frac{2(x+3)}{\sqrt{10-x^2}+1}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)=0\Leftrightarrow x=3\Rightarrow y=3.$$

Vì $\left(x^2+3x+1\right)+\dfrac{2(x+3)}{\sqrt{10-x^2}+1}=0$ vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases}x=3\\y=3\end{cases}$.

Cách 2: Đặt $z=\sqrt{12-y}\ge 0\Rightarrow y=12-z^2$, phương trình (1) viết lại như sau : $xz+\sqrt{(12-z^2)(12-x^2)}=12\Leftrightarrow xz+\sqrt{144-12x^2-12z^2+z^2x^2}=12$

$$\Leftrightarrow \sqrt{144-12x^2-12z^2+z^2x^2}=12-xz\Rightarrow 144-12x^2-12z^2+z^2x^2=144-24xz+z^2x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+z^2-2xz=0\ (3).$$

Nếu $z=0$ không thỏa mãn;

Xét , $z\ne 0$ ta có: $\left(\dfrac{x}{z}\right)^2+1-2.\dfrac{x}{z}=0\Leftrightarrow\left(\dfrac{x}{z}-1\right)^2=0\Leftrightarrow\dfrac{x}{z}=1\Leftrightarrow x=z$

$$\Leftrightarrow x=\sqrt{12-y}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=12-y\\x\ge 0\end{cases}.$$

Thế $y=12-x^2$ vào (2) ta được phương trình :

$$x^3-8x-1=2\sqrt{10-x^2}\Leftrightarrow x\left(x^2-8\right)-1=2\sqrt{10-x^2}.$$

Đặt $t=\sqrt{10-x^2}\ge 0\Rightarrow t^2=10-x^2$ ta có hệ phương trình:

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\left(10-t^2-8\right)-1=2t\\t^2+x^2=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2t+1}{2-t^2}\\t^2+x^2=10\end{cases}\quad\left(t\ne\pm\sqrt{2}\right)$$

Trần Tuấn Anh – Mail: TranTuanAnh858@gmail.com

$$\Rightarrow t^2+\left(\frac{2t+1}{2-t^2}\right)^2=10 \Leftrightarrow t^2+\frac{4t^2+4t+1}{4-4t^2+t^4}=10$$

$$\Leftrightarrow 4t^2-4t^4+t^6+4t^2+4t+1=40-40t^2+10t^4$$

$$\Leftrightarrow t^6-14t^4+48t^2+4t-39=0 \Leftrightarrow (t-1)\left(t^5+t^4-13t^3-13t^2+35t+39\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t-1=0 \\ t^5+t^4-13t^3-13t^2+35t+39=0 \end{cases}.$$

TH1: $t-1=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow \sqrt{10-x^2}=1 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=3 \Rightarrow y=3$ (vì $x \ge 0$)

TH2: $t^5+t^4-13t^3-13t^2+35t+39=0 \Leftrightarrow t^3\left(t^2-13\right)+t^2\left(t^2-13\right)+35t+39=0$

$$\Leftrightarrow \left(t^2-13\right)\left(t^3+t^2\right)+35(t+1)+4=0 \Leftrightarrow t^2\left(t^2-13\right)(t+1)+35(t+1)+4=0$$

$$\Leftrightarrow (t+1)\left(t^4-13t^2+35\right)+4=0 .(4)$$

Do $t \in \left[0;\sqrt{10}\right]$ nên $t+1>0$ và $t^4-13t^2+35>0$, suy ra (4) vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}$.

Cách 3: Áp dụng BĐT

Do $y \ge 2$ và $y(12-x^2) \ge 0$ nên $12-x^2 \ge 0$, từ đó ta áp dụng bất đẳng thức $ab \le \frac{a^2+b^2}{2}$ ta được:

$$x\sqrt{12-y}+\sqrt{y(12-x^2)}=x\sqrt{12-y}+\sqrt{y}.\sqrt{12-x^2} \le \frac{x^2+(12-y)}{2}+\frac{y+\left(12-x^2\right)}{2}=12$$

Đẳng thức xảy ra khi ta có $\begin{cases} x=\sqrt{12-y} \\ \sqrt{y}=\sqrt{12-x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=12-x^2 \\ x \ge 0 \end{cases}$.

Thế $y=12-x^2$ vào (2) ta có : $x^3-8x-1=2\sqrt{10-x^2}$

Trần Tuấn Anh – Mail: TranTuanAnh858@gmail.com

$x^3 - 8x - 1 - 2\sqrt{10 - x^2} = 0$.

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 8x - 1 - 2\sqrt{10 - x^2}, x \in \left[0; \sqrt{10}\right]$;

$$f'(x) = 3x^2 - 8 + \frac{2x}{\sqrt{10 - x^2}}, x \in \left[0; \sqrt{10}\right)$$

$$f''(x) = 6x + \frac{2\sqrt{10 - x^2} + \dfrac{2x^2}{\sqrt{10 - x^2}}}{\left(\sqrt{10 - x^2}\right)^2} > 0, \forall x \in \left[0; \sqrt{10}\right)$$

$\Rightarrow f'(x)$ là hàm số đồng biến trên $\left[0; \sqrt{10}\right) \Rightarrow f(x) = 0$ có tối đa hai nghiệm, mà $f(3) = 0$; $f(-1) = 0$ nên $x = 3; x = -1$ là hai nghiệm của $f(x) = 0$. Lại do điều kiện $x \in \left[0; \sqrt{10}\right]$ nên loại nghiệm $x = -1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$.

<u>Cách 4:</u> Đặt $z = \sqrt{12 - y} \geq 0 \Rightarrow y = 12 - z^2$, phương trình (1) viết lại như sau : $xz + \sqrt{(12 - z^2)(12 - x^2)} = 12 \Leftrightarrow xz + \sqrt{144 - 12\left(x^2 + z^2\right) + z^2x^2} = 12$ (3)

Ta có : $xz + \sqrt{144 - 12\left(x^2 + z^2\right) + z^2x^2} \leq xz + \sqrt{144 - 24xz + z^2x^2}$.

Xét $A = xz + \sqrt{144 - 24xz + z^2x^2} = xz + \sqrt{\left(xz - 12\right)^2} = xz + \left|xz - 12\right|$.

Mà $xz + \sqrt{(12 - z^2)(12 - x^2)} = 12$ nên $xz \leq 12 \Rightarrow \left|xz - 12\right| = 12 - xz$, vậy $A = xz + \left|xz - 12\right| = xz + \left(12 - xz\right) = 12$.

Do đó (3) xảy ra khi ta có $x^2 + z^2 = 2xz \Leftrightarrow \left(x - z\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = z \Rightarrow x = \sqrt{12 - y}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 12 - y \\ x \geq 0 \end{cases}$.

Tương tự các cách trên ta tìm ra nghiệm của hpt!

Trần Tuấn Anh – Mail: TranTuanAnh858@gmail.com

Cách 5: Đặt $12-y=b^2,(b\ge 0);12-x^2=a^2,(a\ge 0);y=c^2,(c\ge 0)$, ta có:

Ta có : $\begin{cases} xb+ac=12 \\ x^2+a^2=12 \\ b^2+c^2=12 \end{cases} \Rightarrow \left(x^2+a^2\right)+\left(b^2+c^2\right)=2\left(xb+ac\right)$

$\Leftrightarrow \left(x^2-2xb+b^2\right)+\left(a^2-2ac+c^2\right)=0 \Leftrightarrow \left(x-b\right)^2+\left(a-c\right)^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=b \\ a=c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{12-y} \\ \sqrt{12-x^2}=\sqrt{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=12-y \\ x\ge 0 \end{cases}$

Tương tự các cách trên ta tìm ra nghiệm của hpt!

Cách 6: Đặt $12-y=b^2,(b\ge 0);12-x^2=a^2,(a\ge 0);y=c^2,(c\ge 0)$, ta có:

Ta có : $\begin{cases} xb+ac=12 \\ x^2+a^2=12 \\ b^2+c^2=12 \end{cases}$

Đặt $\vec{u}=(x,a),\vec{v}=(b,c)$, ta có $\vec{u}.\vec{v}\ge\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|$ và đẳng thức xảy ra khi hai véc tơ cùng hướng.

Suy ra $xb+ac\le\sqrt{x^2+a^2}.\sqrt{b^2+c^2}$, mà $xb+ac=12$ và $\sqrt{x^2+a^2}.\sqrt{b^2+c^2}=12$ nên ta phải có hai véc tơ $\vec{u}=(x,a),\vec{v}=(b,c)$ cùng hướng.

$\frac{x}{b}=\frac{a}{c}\Rightarrow\frac{x}{\sqrt{12-y}}=\frac{\sqrt{12-x^2}}{\sqrt{y}} \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{12-x^2}}=\frac{\sqrt{12-y}}{\sqrt{y}} \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{12-x^2}}=\frac{\sqrt{12-y}}{\sqrt{12-\left(\sqrt{12-y}\right)^2}}$. (*)

Tương tự các cách trên ta tìm ra nghiệm của hpt!

Trần Tuấn Anh – Mail: TranTuanAnh858@gmail.com

Trần Tuấn Anh – Mail: TranTuanAnh858@gmail.com

Cách 7: Đặt $tx = \sqrt{12-y} \geq 0 \Rightarrow t^2x^2 = 12 - y$, phương trình (1) viết lại như sau : $tx^2 + \sqrt{(12-t^2x^2)(12-x^2)} = 12 \Leftrightarrow tx^2 + \sqrt{144-12x^2-12x^2t^2+t^2x^4} = 12$

$\Leftrightarrow \sqrt{144-12x^2-12x^2t^2+t^2x^4} = 12 - tx^2 \Rightarrow 144-12x^2-12x^2t^2+t^2x^4 = 144-24tx^2+t^2x^4$

$\Leftrightarrow x^2 + x^2t^2 - 2tx^2 = 0 \Leftrightarrow x^2\left(1+t^2-2t\right) = 0 \Leftrightarrow x^2(t-1)^2 = 0$ (3).

Nếu $x = 0 \Rightarrow y = 12$ (không thỏa mãn hpt).

Nếu $x \neq 0 \Rightarrow t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow x = \sqrt{12-y}$.

Tương tự các cách trên ta tìm ra nghiệm của hpt!