



Trần Tuấn Anh – Mail: [TranTuanAnh858@gmail.com](mailto:TranTuanAnh858@gmail.com)

[www.MATHVN.com](http://www.MATHVN.com)

$$\Rightarrow ND^2 = NH^2 + HD^2 = 1^2 + 3^2 = 10 \Leftrightarrow ND = \sqrt{10}$$

Suy ra D là giao điểm của đường tròn tâm M, bán kính MD và đường tròn tâm N, bán kính ND. Tọa độ của D là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 20 \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 20 \\ x-3y = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (4+3y)^2 + (y-2)^2 = 20 \\ x-3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10y(y+2) = 0 \\ x-3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \\ x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$$

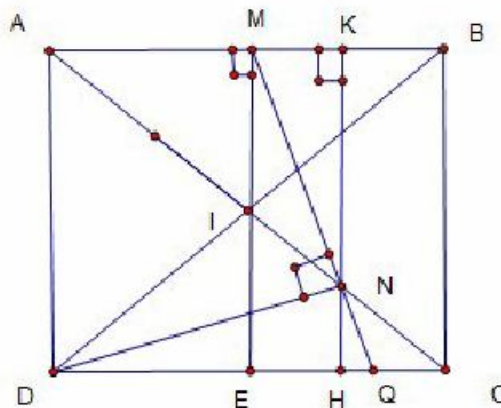
Lại có  $\triangle MNE \sim \triangle NQH$   $\cdot \frac{MN}{NQ} = \frac{AN}{NC} = \frac{3NC}{NC} = 3 \Rightarrow \overline{MN} = 3\overline{NQ} \Rightarrow Q\left(\frac{7}{3}; -2\right)$ .

**TH1:**  $D(5;0)$ ,  $Q\left(\frac{7}{3}; -2\right) \Rightarrow (CD): 3x - 4y - 15 = 0$ .

**TH2:**  $D(-1; -2)$ ,  $Q\left(\frac{7}{3}; -2\right) \Rightarrow (CD): y + 2 = 0$ .

Vậy phương trình của CD là:  $(CD): y + 2 = 0$  ;  $(CD): 3x - 4y - 15 = 0$ .

**Cách 2:**



[www.DeThiThuDaiHoc.com](http://www.DeThiThuDaiHoc.com)

Trần Tuấn Anh – Mail: [TranTuanAnh858@gmail.com](mailto:TranTuanAnh858@gmail.com)

[www.MATHVN.com](http://www.MATHVN.com)

N là trung điểm của IC nên K là trung điểm của MB. Đặt  $MK = x > 0$   
 $\Rightarrow AK = NK = 3x$  (do  $\triangle AKN$  vuông cân tại K).

$$\overline{MN} = (1, -3) \Rightarrow MN = \sqrt{10}, \text{ mà } MN^2 = KN^2 + KM^2 \Rightarrow 10 = 9x^2 + x^2 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\Rightarrow MD^2 = MA^2 + AD^2 = 2^2 + 4^2 = 20 \Leftrightarrow MD = 2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow ND^2 = NH^2 + HD^2 = 1^2 + 3^2 = 10 \Leftrightarrow ND = \sqrt{10}$$

Suy ra D là giao điểm của đường tròn tâm M, bán kính MD và đường tròn tâm N, bán kính ND. Tọa độ của D là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 20 \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 20 \\ x-3y = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (4+3y)^2 + (y-2)^2 = 20 \\ x-3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10y(y+2) = 0 \\ x-3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \\ x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$$

Mà  $d(M, DC) = 4d(N, DC)$ , ta xét các trường hợp :

**TH1:**  $D(5;0)$ , phương trình đường thẳng DC với VTPT  $\vec{n}(u,v)$  là:

$$ax + by - 5a = 0.$$

$$\text{Do đó } d(M, DC) = 4d(N, DC) \Leftrightarrow \frac{|a + 2b - 5a|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 4 \frac{|2a - b - 5a|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow |2b - 4a| = 4|3a + b|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b - 4a = 12a + 4b \\ 2b - 4a = -12a - 4b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + 8a = 0 \\ 3b + 4a = 0 \end{cases}$$

- Với  $b + 8a = 0$ , chọn  $a = 1; b = -8$  ta có (CD):  $x - 8y - 5 = 0$ . Do M, N nằm cùng phía so với (CD) nên phương trình này không thỏa bài toán.

- Với  $3b + 4a = 0$ , chọn  $a = 3; b = -4$  ta có (CD):  $3x - 4y - 15 = 0$ . Do M, N nằm cùng phía so với (CD) nên phương trình thỏa bài toán.

[www.DeThiThuDaiHoc.com](http://www.DeThiThuDaiHoc.com)

Trần Tuấn Anh – Mail: [TranTuanAnh858@gmail.com](mailto:TranTuanAnh858@gmail.com)

[www.MATHVN.com](http://www.MATHVN.com)

**TH2:**  $D(-1; -2)$ , phương trình đường thẳng DC với VTPT  $\vec{u}(u, v)$  là:

$$ax + by + a + 2b = 0.$$

Do đó  $d(M, DC) = 4d(N, DC)$

$$\Leftrightarrow \frac{|a + 2b + a + 2b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 4 \frac{|2a - b + a + 2b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow |2a + 4b| = 4|3a + b|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 4b = 12a + 4b \\ 2a + 4b = -12a - 4b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 7a + 4b = 0 \end{cases}$$

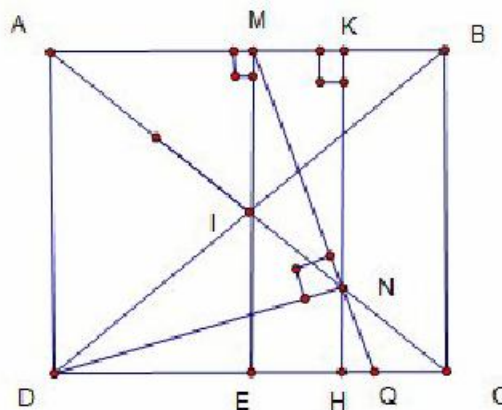
- Với  $a = 0$ , chọn  $b = 1$  ta có  $(CD): y + 2 = 0$ . Do M, N nằm cùng phía so với  $(CD)$  nên phương trình này thỏa bài toán.

- Với  $7a + 4b = 0$ , chọn  $a = 4; b = -7$  ta có  $(CD): 4x - 7y - 10 = 0$ . Do M, N nằm cùng phía so với  $(CD)$  nên phương trình này không thỏa bài toán.

Vậy phương trình của CD là :

$$(CD): y + 2 = 0 \quad ; \quad (CD): 3x - 4y - 15 = 0.$$

### Cách 3:



Ta có  $\triangle MNE \cong \triangle NDH$  (hai cạnh góc vuông)

$$\begin{cases} MN = ND \\ \angle MNE + \angle DNH = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle MNE \cong \triangle NDH \Rightarrow \begin{cases} MN = ND \\ MN \perp DN \end{cases}$$

[www.DeThiThuDaiHoc.com](http://www.DeThiThuDaiHoc.com)

Trần Tuấn Anh – Mail: [TranTuanAnh858@gmail.com](mailto:TranTuanAnh858@gmail.com)

[www.MATHVN.com](http://www.MATHVN.com)

Phương trình đường thẳng ND là (ND):  $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 - t \end{cases}$

Gọi  $D(2+3t; -1-t) \Rightarrow \overrightarrow{ND} = (3t; -t)$ , mà  $MN = ND = \sqrt{10}$  nên ta có

$$\sqrt{9t^2 + t^2} = \sqrt{10} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \Rightarrow D(5; 0) \\ t = -1 \Rightarrow D(-1; -2) \end{cases}$$

Lại có  $\triangle \sim \triangle$   $\cdot \frac{MN}{NQ} = \frac{AN}{NC} = \frac{3NC}{NC} = 3 \Rightarrow \overrightarrow{MI} = \overrightarrow{QI} \Rightarrow Q\left(\frac{7}{3}; -2\right)$ .

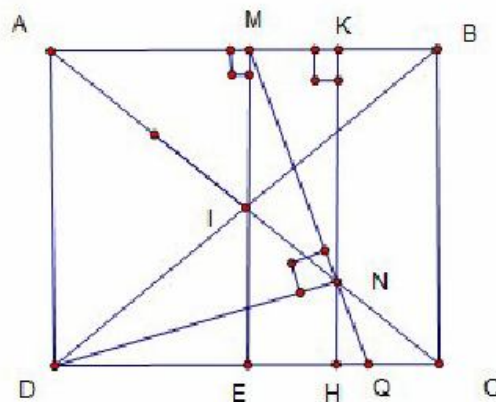
**TH1:**  $D(5; 0), Q\left(\frac{7}{3}; -2\right) \Rightarrow (CD): 3x - 4y - 15 = 0$ .

**TH2:**  $D(-1; -2), Q\left(\frac{7}{3}; -2\right) \Rightarrow (CD): y + 2 = 0$ .

Vậy phương trình của CD là:  $(CD): y + 2 = 0$  ;  $(CD): 3x - 4y - 15 = 0$ .

**Chú ý:** ta có nhiều cách để chứng minh  $MN \perp DN$  như: xét tích vô hướng  $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{DN} = 0$ ; hoặc tính MN, ND, MD rồi áp dụng Pi-ta-go đảo...

**Cách 4:**



Ta có  $\triangle \sim \triangle$   $\cdot \frac{MN}{NQ} = \frac{AN}{NC} = \frac{3NC}{NC} = 3 \Rightarrow \overrightarrow{MI} = \overrightarrow{QI} \Rightarrow Q\left(\frac{7}{3}; -2\right)$ .

Đặt  $MK = m \Rightarrow KN = 3m \Rightarrow MN = \sqrt{MK^2 + KN^2} = m\sqrt{10}$

[www.DeThiThuDaiHoc.com](http://www.DeThiThuDaiHoc.com)

Trần Tuấn Anh – Mail: [TranTuanAnh858@gmail.com](mailto:TranTuanAnh858@gmail.com)

[www.MATHVN.com](http://www.MATHVN.com)

$$\cos KMN = \cos NQD = \frac{MK}{MN} = \frac{m}{m\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}; \overrightarrow{MN} = (1, -3).$$

Đường thẳng DC có VTCP  $\vec{u}(a, b)$  thì ta có :

$$\left| \cos(\vec{u}, \overrightarrow{MN}) \right| = \frac{1}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow \frac{|a-3b|}{\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow |a-3b| = \sqrt{a^2+b^2}$$

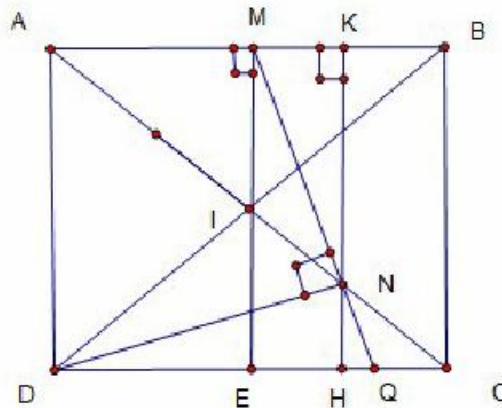
$$\Leftrightarrow a^2 + 9b^2 - 6ab = a^2 + b^2 \Leftrightarrow 8b^2 - 6ab = 0 \Leftrightarrow 2b(4b - 3a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ 4b - 3a = 0 \end{cases}$$

**TH1:**  $b = 0 \Rightarrow \vec{u}(1, 0) \Rightarrow \vec{n}(0, 1) \Rightarrow (CD): y + 2 = 0.$

**TH2:**  $4b - 3a = 0$ , chọn  $a = 4; b = 3 \Rightarrow \vec{u}(4, 3) \Rightarrow \vec{n}(3, -4) \Rightarrow (CD): 3x - 4y - 15 = 0.$

Vậy phương trình của CD là:  $(CD): y + 2 = 0$  ;  $(CD): 3x - 4y - 15 = 0.$

**Cách 5:**



Ta có  $\triangle MNI \sim \triangle NQI \Rightarrow \frac{MN}{NQ} = \frac{NI}{NQ} = \frac{3NI}{NC} = 3 \Rightarrow \overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{NQ} \Rightarrow Q\left(\frac{7}{3}; -2\right).$

Đặt  $MK = m \Rightarrow KN = 3m \Rightarrow MN = \sqrt{MK^2 + KN^2} = m\sqrt{10}$

;  $\overrightarrow{MN} = (1, -3) \Rightarrow MN = \sqrt{10} \Rightarrow m\sqrt{10} = \sqrt{10} \Leftrightarrow m = 1.$

Gọi  $K(a; b)$ ,  $\overrightarrow{MN} = (a-1; b-2)$ ,  $\overrightarrow{NQ} = (a-2; b+1)$  mà  $MK = 1; KN = 3$  nên a, b là nghiệm của hệ phương trình:

[www.DeThiThuDaiHoc.com](http://www.DeThiThuDaiHoc.com)

Trần Tuấn Anh – Mail: [TranTuanAnh858@gmail.com](mailto:TranTuanAnh858@gmail.com)  
[www.MATHVN.com](http://www.MATHVN.com)

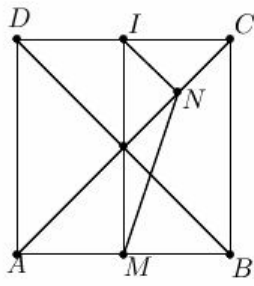
$$\begin{cases} (a-1)^2 + (b-2)^2 = 1 \\ (a-2)^2 + (b+1)^2 = 3 \end{cases}, \text{ suy ra tọa độ của điểm K.}$$

Đường thẳng CD đi qua  $Q\left(\frac{7}{3}; -2\right)$  và nhận  $\overrightarrow{MN}$  làm véc tơ chỉ phương!

Vậy phương trình của CD là:  $(CD): y + 2 = 0$  ;  $(CD): 3x - 4y - 15 = 0$ .

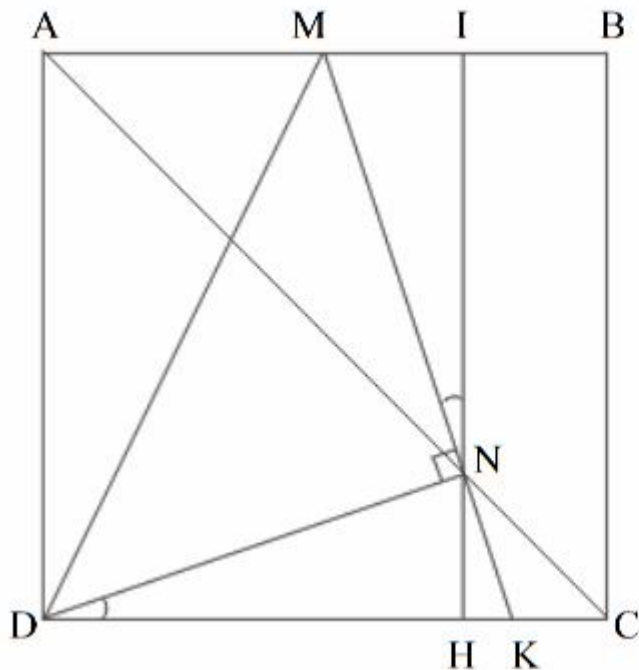
Trần Tuấn Anh – Mail: [TranTuanAnh858@gmail.com](mailto:TranTuanAnh858@gmail.com)  
[www.DeThiThuDaiHoc.com](http://www.DeThiThuDaiHoc.com)

### Cách 6. Đáp án chính thức của Bộ Giáo Dục

Câu	Đáp án	Điểm
7 (1,0đ)	 <p>Ta có <math>MN = \sqrt{10}</math>. Gọi <math>a</math> là độ dài cạnh của hình vuông <math>ABCD</math>, <math>a &gt; 0</math>. Ta có <math>AM = \frac{a}{2}</math> và <math>AN = \frac{3AC}{4} = \frac{3a\sqrt{2}}{4}</math>,  nên <math>MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cdot \cos \widehat{MAN} = \frac{5a^2}{8}</math>.  Do đó <math>\frac{5a^2}{8} = 10</math>, nghĩa là <math>a = 4</math>.</p>	0,25
	<p>Gọi <math>I(x; y)</math> là trung điểm của <math>CD</math>. Ta có <math>IM = AD = 4</math>  và <math>IN = \frac{BD}{4} = \sqrt{2}</math>, nên ta có hệ phương trình</p> $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 16 \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; y = -2 \\ x = \frac{17}{5}; y = -\frac{6}{5} \end{cases}$	0,25
	<p><b>www.MATHVN.com</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Với <math>x = 1; y = -2</math> ta có <math>I(1; -2)</math> và <math>\overrightarrow{IM} = (0; 4)</math>.  Đường thẳng <math>CD</math> đi qua <math>I</math> và có vectơ pháp tuyến là <math>\overrightarrow{IM}</math>, nên có phương trình <math>y + 2 = 0</math>.</li> </ul>	0,25
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Với <math>x = \frac{17}{5}; y = -\frac{6}{5}</math> ta có <math>I\left(\frac{17}{5}; -\frac{6}{5}\right)</math> và <math>\overrightarrow{IM} = \left(-\frac{12}{5}; \frac{16}{5}\right)</math>.  Đường thẳng <math>CD</math> đi qua <math>I</math> và có vectơ pháp tuyến là <math>\overrightarrow{IM}</math>, nên có phương trình <math>3x - 4y - 15 = 0</math>.</li> </ul>	0,25

GV: Nguyễn Linh - www.MATHVN.com

Cách 7 :



Từ gt ta có :  $\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{NK} \Leftrightarrow K\left(\frac{7}{3}; -2\right)$

$$\Delta HND = \Delta IMN$$

Dễ suy ra :  $ND = NM$ ;  $\widehat{HDN} = \widehat{INM}$  và  $DN \perp MN$

Nên  $\Delta NMD$  vuông cân tại N

Đường thẳng DN có VTPT là  $\overrightarrow{MN} = (1; -3)$

Nên PT của DN qua N :  $1(x - 2) - 3(y + 1) = 0 \Leftrightarrow x - 3y - 5 = 0$

$$D \in DN \Leftrightarrow D(3t + 5; t)$$

Suy ra :  $\overrightarrow{ND} = (3t + 3; t + 1)$

$$\text{Ta có : } ND = MN \Leftrightarrow ND^2 = MN^2 \Leftrightarrow (3t + 3)^2 + (t + 1)^2 = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -2 \end{cases}$$

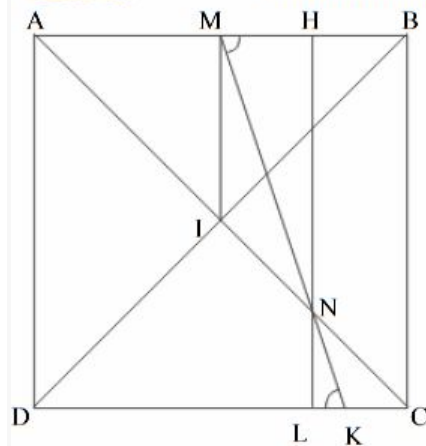
$$\text{Với } t = 0 \Rightarrow D(5; 0) \Rightarrow \overrightarrow{DK} = \left(-\frac{8}{3}; -2\right) \Rightarrow DC : 3x - 4y - 15 = 0$$

$$\text{Với } t = -2 \Rightarrow D(-1; -2) \Rightarrow \overrightarrow{DK} = \left(\frac{10}{3}; 0\right) \Rightarrow DC : y + 2 = 0$$

$$\text{Vậy : } DC : 3x - 4y - 15 = 0; DC : y + 2 = 0$$



Cách 8 : GV: Nguyễn Linh - www.MATHVN.com



Từ gt ta có :  $\overline{MN} = 3\overline{NK} \Leftrightarrow K(\frac{7}{3}; -2)$

N là trung điểm của IC, suy ra H là trung điểm của MB

Nên :  $HM = NL; NH = 3MH$

$\overline{MN} = (1; -3)$

Đặt :  $MH = x > 0$ , suy ra :  $HN = 3x$

$\Delta HMN$  vuông tại H, nên :  $HM^2 + HN^2 = MN^2 \Leftrightarrow x^2 + 9x^2 = 10 \Leftrightarrow x = 1$  (vì  $x > 0$ )

Suy ra :  $NL = HM = 1$

PT của CD qua K:  $A(x - \frac{7}{3}) + B(y + 2) = 0; A^2 + B^2 > 0$

Ta có :  $d(N, CD) = NL \Leftrightarrow \frac{|A(2 - \frac{7}{3}) + B(-1 + 2)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 1$

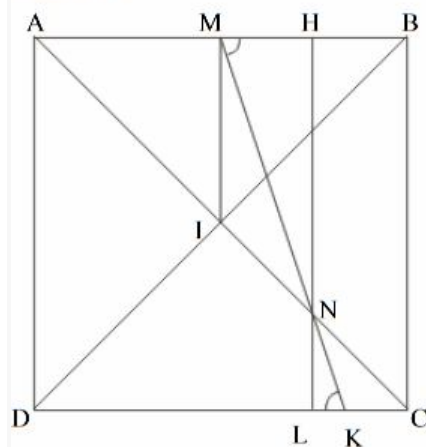
Giải tìm được :

$A = 0$  và  $B = 1 \Rightarrow CD: y + 2 = 0$

$A = 3$  và  $B = -4 \Rightarrow CD: 3x - 4y - 15 = 0$

Vậy :  $DC: 3x - 4y - 15 = 0; DC: y + 2 = 0$

Cách 9 :



Từ gt ta có :  $\overline{MN} = 3\overline{NK} \Leftrightarrow K(\frac{7}{3}; -2)$

N là trung điểm của IC, suy ra H là trung điểm của MB

Nên :  $HM = NL; NH = 3MH$  ; suy ra  $\tan K = \tan M = \frac{HN}{HM} = 3$

GV: Nguyễn Linh - www.MATHVN.com

$$\text{Từ đó : } \frac{1}{\cos^2 K} = 1 + \tan^2 K = 10 \Rightarrow \cos^2 K = \frac{1}{10}$$

$$\overrightarrow{MN} = (1; -3)$$

PT của CD qua K :  $A(x - \frac{7}{3}) + B(y + 2) = 0; A^2 + B^2 > 0$

suy ra CD có VTCP là  $\vec{u} = (B; -A)$

$$\text{Ta có : } \cos K = |\cos(\vec{u}, \overrightarrow{MN})| \Leftrightarrow \cos K = \frac{|B + 3A|}{\sqrt{10}\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{10} = \left(\frac{|B + 3A|}{\sqrt{10}\sqrt{A^2 + B^2}}\right)^2 \Leftrightarrow (B + 3A)^2 = A^2 + B^2$$

Giải tìm được :

$$A = 0 \text{ và } B = 1 \Rightarrow CD : y + 2 = 0$$

$$A = 3 \text{ và } B = -4 \Rightarrow CD : 3x - 4y - 15 = 0$$

$$\text{Vậy : } \Rightarrow DC : 3x - 4y - 15 = 0; DC : y + 2 = 0$$